



# mathecoach

16. August 2017

## 1. Maximaler Definitionsbereich:

- Es gibt drei Dinge, die den Definitionsbereich beeinflussen können:
  - Division durch 0: Elemente, die den Nenner bei einer gebrochen rationalen Funktion zu 0 werden lassen, gehören nicht in den Definitionsbereich.
  - Wurzel mit geradem Wurzelexponenten und negativen Radikanten: Elemente, die den Radikanten bei einer Wurzelfunktion mit geradem Wurzelexponenten negativ (Radikant  $< 0$ ) werden lassen, gehören nicht in den Definitionsbereich.
  - Logarithmus aus nichtpositiven Numeri: Elemente die den Numerus bei einer Logarithmusfunktion nichtpositiv (Numerus  $\leq 0$ ) werden lassen, gehören nicht in den Definitionsbereich.
- Falls eines oder mehrere der vorgenannten Dinge im Funktionsterm enthalten sind, müssen die entsprechenden Elemente herausgefunden werden und aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen werden.
- Lösungsangabe:  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{\dots\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \dots\}$ .

## 2. Wertebereich:

- ganzrationale Funktion mit ungeradem Grad:
  - Alle reellen Zahlen sind Funktionswerte. Lösungsangabe:  $\mathcal{W}_f = \mathbb{R} = \{y \in \mathbb{R}\}$ .
- ganzrationale Funktion mit geradem Grad:
  - Die Funktion besitzt ein globales Maximum (globales Minimum).
  - Finden der Extrema, siehe unten.
  - Lösungsangabe:  $\mathcal{W}_f = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq y_{max} (y \geq y_{min})\}$ .
- gebrochenrationale Funktion
  - Zum Schluss der Kurvendiskussion mit Hilfe der Skizze des Funktionsgraphen entscheiden.
  - Beachten des Definitionsbereiches, der Polstellen und des Verhaltens im Unendlichen.
- Exponentialfunktion
  - Zum Schluss der Kurvendiskussion mit Hilfe der Skizze des Funktionsgraphen entscheiden.
  - Beachten des Verhaltens im Unendlichen.

## 3. Nullstellen (Schnittpunkte) mit der $x$ -Achse (Abszissenachse):

- Funktion gleich Null setzen ( $y = 0$ ).

- Nach  $x$  auflösen (GTR, Polynomdivision, Ausklammern).
  - Lösungsangabe bei Nullstellen:  $x = \dots$  (bei Schnittpunkten:  $S_x(\dots; 0)$ ).
4. Schnittpunkt mit der  $y$ -Achse (Ordinatenachse):
- Für  $x = 0$  einsetzen und  $y = f(x)$  ausrechnen.
  - Lösungsangabe:  $S(0, \dots)$ .
5. Polstellen bei gebrochen-rationalen Funktionen:
- Nenner gleich Null setzen und nach  $x$  auflösen.
  - Diese Lösungen in den Zähler einsetzen und mit der Null vergleichen
  - Zähler  $\neq 0$  ist es eine Polstelle; Zähler = 0 ist es eine Lücke (wenn Vielfachheiten der Nullstellen übereinstimmen)
6. Verhalten im Unendlichen:
- ganzrationale Funktion
    -
  - gebrochenrationale Funktion
    - Vergleich der Grade des Zählers und Nenners:
    - Zählergrad kleiner Nennergrad: Waagerechte Asymptote auf der  $x$ -Achse. ( $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ )
    - Zählergrad gleich Nennergrad: Waagerechte Asymptote mit der Gleichung  $y = \frac{\text{Leitkoeffizient Zähler}}{\text{Leitkoeffizient Nenner}}$   
 $(\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{\text{Leitkoeffizient Zähler}}{\text{Leitkoeffizient Nenner}})$
    - Zählergrad größer Nennergrad: Polynomdivision ergibt asymptotisches Polynom.
7. Symmetrieverhalten:
- Erst Funktion zeichnen lassen, dann eine Behauptung aufstellen und beweisen.
  - Achsensymmetrie:  $f(x) = f(-x)$ . Zum Beispiel ganzrationale Funktionen nur mit geraden Exponenten
  - Punktsymmetrie/Zentralsymmetrie zu  $(0, 0)$ :  $f(-x) = -f(x)$ . Zum Beispiel ganzrationale Funktionen nur mit ungeraden Exponenten
  - Sollte keine Symmetrie vorhanden sein, dann einfach ein Gegenbeispiel suchen, welches sich zum Beispiel an den Nullstellen befindet oder an der  $y$ -Achse. (Extremum bei AS und Wendepunkt bei PS).
8. Relative/lokale Extrema:
- Erste Ableitung  $f'(x)$  bilden.
  - Erste Ableitung gleich Null setzen ( $y' = 0$ ).
  - Nach  $x$  auflösen (doppelte Nullstellen, GTR, Polynomdivision, Ausklammern).
  - Diese Lösungen in die Funktion einsetzen und  $y$  ausrechnen.
  - Lösungsangabe:  $E(\dots; \dots)$ .
  - **Achtung:** Nicht zwingend ein Extremum! (siehe 9.)
9. Art der Extrema:
- Zweite Ableitung  $f''(x)$  bilden.
  - Die Extremstellen (siehe 8.) als  $x$ -Werte in die zweite Ableitung einsetzen.
  - Diese Ergebnisse mit der Null vergleichen:

- $f''(x) < 0$  bedeutet Maximum,  $f''(x) > 0$  Minimum.

10. Wendepunkte:

- Zweite Ableitung  $f''(x)$  bilden.
- Zweite Ableitung gleich Null setzen ( $y'' = 0$ ).
- Nach  $x$  auflösen (GTR, Polynomdivision, Ausklammern).
- Diese Lösungen in die Funktion einsetzen und  $y$  ausrechnen.
- Dritte Ableitung  $f'''(x)$  bilden.
- In die dritte Ableitung einsetzen und mit Null vergleichen.
- $f'''(x) > 0$  Wendepunkt mit einer Rechts-Links-Krümmung,  $f'''(x) < 0$  Wendepunkt mit einer Links-Rechts-Krümmung,  $f'''(x) = 0$  weitere Untersuchungen notwendig.
- Lösungsangabe:  $W(\dots; \dots)$ .

11. Tangente an einen Punkt der Funktion  $f$ :

- Grundgedanke bei Geraden ist immer  $y = mx + n$ .
- Wenn Punkt vorgegeben ist, so ist bereits  $x$  und  $y = f(x)$  gegeben.
- Erste Ableitung  $f'(x)$  bilden.
- Den  $x$ -Wert des Punktes in die erste Ableitung einsetzen ( $f'(x) = m$ ).
- $m$ ,  $x$  und  $y$  in Geradengleichung einsetzen.
- Nach  $n$  auflösen.
- Lösungsangabe:  $y = \dots x + \dots$ .

12. Tangente mit einem bestimmten Anstieg:

- Grundgedanke bei Geraden ist immer  $y = mx + n$ .
- Wenn der Anstieg vorgegeben ist, dann ist also bereits  $m = y' = f'(x)$  gegeben.
- Erste Ableitung  $f'(x)$  bilden.
- Erste Ableitung gleich  $m$  setzen und nach  $x$  auflösen.
- Diese Lösungen in die Funktion einsetzen und  $y$  ausrechnen.
- $x$ ,  $y$  und  $m$  in die Geradengleichung einsetzen.
- Nach  $n$  auflösen.
- Lösungsangabe:  $y = \dots x + \dots$ .

13. Normale in einem Punkt:

- Grundgedanke bei Geraden ist immer  $y = mx + n$ .
- Tangente in diesem Punkt ausrechnen (siehe 11.).
- Wenn Punkt vorgegeben ist, so ist bereits  $x_0$  und  $y_0 = f(x_0)$  gegeben.
- Der Anstieg der Normalen  $m_N$  ist das negative Reziproke von  $m_T$ , also  $m_N = \frac{-1}{m_T}$ .
- $x_0$ ,  $y_0$  und  $m_N$  in die Geradengleichung einsetzen.
- Nach  $n$  auflösen.
- Lösungsangabe:  $y = m_N x + n$ .

14. Schnittpunkte zweier Funktionen:

- Funktionsgleichungen gleichsetzen.
- Eine Seite zu Null machen.

- Nach  $x$  auflösen (Prinzip, wie bei Nullstellen berechnen).
- Diese Lösungen in die einfachere der beiden Funktion einsetzen und  $y$  ausrechnen.
- Lösungsangabe:  $S(\dots; \dots)$

15. Fläche zwischen zwei Funktionen:

- Schnittstellen ausrechnen (siehe 14.).
- Differenzenfunktion bilden ( $f(x) - g(x)$ ).
- Das Integral von der linken Schnittstelle bis zur rechten Schnittstelle der Funktion  $\int_a^b (f - g) dx$ .
- Stammfunktion bilden.
- Rechte Schnittstelle in die Stammfunktion einsetzen.
- Linke Schnittstelle in die Stammfunktion einsetzen.
- Differenz dieser beiden Werte bilden. (Wert der rechten Schnittstelle - Wert der linken Schnittstelle)
- Gegebenenfalls nachträglich den Betrag bilden.

16. Fläche zwischen Funktionen und x-Achse:

- Nullstellen ausrechnen (siehe 3.).
- Das Integral von der linken Nullstelle bis zur rechten Nullstelle der Funktion  $\int_a^b f dx$ .
- Stammfunktion bilden.
- Rechte Nullstelle in die Stammfunktion einsetzen.
- Linke Nullstelle in die Stammfunktion einsetzen.
- Differenz dieser beiden Werte bilden. (Wert der rechten Nullstelle - Wert der linken Nullstelle)
- Gegebenenfalls nachträglich den Betrag bilden.

17. Extremwertaufgaben:

- Skizze für einen beliebigen Wert. Dieser Wert ist völlig egal, aber man benötigt eine Visualisierung.
- In die Skizze bereits an gegebene Punkte die Koordinaten schreiben.
- Punkte auf dem Graphen von  $f$  haben die Koordinaten  $(x; f(x))$ , Punkte auf der x-Achse  $(\dots; 0)$  und Punkte auf der y-Achse  $(0; \dots)$ .
- Achsenparallele Strecken finden.
- Hauptbedingung aufstellen. (was soll maximiert oder minimiert werden)
- Nebenbedingungen aufstellen. (was macht das Extremalproblem zu unserem Problem)
- Nebenbedingungen in Hauptbedingung einsetzen ergibt die Zielfunktion.
- Extrempunkte und Art dieser Extrempunkte der Zielfunktion bilden (siehe 8. und 9.)
- eventuell Randbedingungen untersuchen.