19. Januar 2015

1. Maximaler Definitionsbereich:
   - Es gibt drei Dinge, die den Definitionsbereich beeinflussen können:
     - Divison durch 0: Elemente, die den Nenner bei einer gebrochen rationalen Funktion zu 0 werden lassen, gehören nicht in den Definitionsbreich.
     - Wurzel mit geradem Wurzelexponenten und negativen Radikanten: Elemente, die den Radikaten bei einer Wurzelfunktion mit geradem Wurzelexponenten negativ (Radikant < 0) werden lassen, gehören nicht in den Definitionsbreich.
     - Logarithmus aus nichtpositiven Numeri: Elemente die den Numerus bei einer Logarithmusfunktion nichtpositiv (Numerus ≤ 0) werden lassen, gehören nicht in den Definitionsbreich.
   - Falls eines oder mehrere der vorgenannten Dinge im Funktionsterm enthalten sind, müssen die entsprechenden Elemente herausgefunden werden und aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen werden.
   - Lösungsangabe: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{...\} = \{x \in \mathbb{R} \mid ...\}$.
2. Wertebereich:
   - ganzrationale Funktion mit ungeradem Grad:
     - Alle reellen Zahlen sind Funktionswerte. Lösungsangabe:$\mathcal{W}_f = \mathbb{R} = \{y \in \mathbb{R}\}$.
   - ganzrationale Funktion mit geradem Grad:
     - Die Funktion besitzt ein globales Maximum (globales Minimum).
     - Finden der Extrema, siehe unten.
     - Lösungsangabe: $\mathcal{W}_f = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq y_{max}(y \geq y_{min})\}$.
   - gebrochenrationale Funktion
     - Zum Schluss der Kurvendiskussion mit Hilfe der Skizze des Funktionsgraphen entscheiden.
     - Beachten des Definitionsbereiches, der Polstellen und des Verhaltens im Unendlichen.
   - Exponentialfunktion
     - Zum Schluss der Kurvendiskussion mit Hilfe der Skizze des Funktionsgraphen entscheiden.
     - Beachten des Verhaltens im Unendlichen.
3. Nullstellen (Schnittpunkte) mit der x-Achse (Abszissenachse):
   - Funktion gleich Null setzen ($y = 0$).

- Nach x auflösen (GTR, Polynomdivision, Ausklammern).
- Lösungsangabe bei Nullstellen: $x = \ldots$ (bei Schnittpunkten: $S_x(...;0)$).

4. Schnittpunkt mit der y-Achse (Ordinatenachse):
   - Für $x = 0$ einsetzen und $y = f(x)$ ausrechnen.
   - Lösungsangabe: $S(0, ...)$.

5. Polstellen bei gebrochen-rationalen Funktionen:
   - Nenner gleich Null setzen und nach x auflösen.
   - Diese Lösungen in den Zähler einsetzen und mit der Null vergleichen
   - Zähler$\neq$ 0 ist es eine Polstelle; Zähler$=$ 0 ist es eine Lücke (wenn Vielfachheiten der Nullstellen übereinstimmen)

6. Verhalten im Unendlichen:
   - ganzrationale Funktion
     -
   - gebrochenrationale Funktion
     - Vergleich der Grade des Zählers und Nenners:
     - Zählergrad kleiner Nennergrad: Waagerechte Asymptote auf der x-Achse. ($\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$)
     - Zählergrad gleich Nennergrad: Waagerechte Asymtote mit der Gleichung $y = \frac{\text{Leitkoeffizient Zähler}}{\text{Leitkoeffizient Nenner}}$ ($\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{\text{Leitkoeffizient Zähler}}{\text{Leitkoeffizient Nenner}}$)
     - Zählergrad größer Nennergrad: Polynomdivision ergibt asymptotisches Polynom.

7. Symmertrieverhalten:
   - Erst Funktion zeichnen lassen, dann eine Behauptung aufstellen und beweisen.
   - Achsensymmetrie: $f(x) = f(-x)$. Zum Beispiel ganzrationale Funktionen nur mit geraden Exponenten
   - Punktsymmetrie/Zentralsymmertrie zu $(0,0)$: $f(-x) = -f(x)$. Zum Beispiel ganzrationale Funktionen nur mit ungeraden Exponenten
   - Sollte keine Symmetrie vorhanden sein, dann einfach ein Gegenbeispiel suchen, welches sich zum Beispiel an den Nullstellen befindet oder an der y-Achse.(Extremum bei AS und Wendepunkt bei PS).

8. Relative/lokale Extrema:
   - Erste Ableitung $f'(x)$ bilden.
   - Erste Ableitung gleich Null setzen ($y' = 0$).
   - Nach x auflösen (doppelte Nullstellen, GTR, Polynomdivision, Ausklammern).
   - Diese Lösungen in die Funktion einsetzen und y ausrechnen.
   - Lösungsangabe: $E(...;...)$.
   - **Achtung:** Nicht zwingend ein Extremum! (siehe 9.)

9. Art der Extrema:
   - Zweite Ableitung $f''(x)$ bilden.
   - Die Extremstellen (siehe 8.) als x-Werte in die zweite Ableitung einsetzen.
   - Diese Ergebnisse mit der Null vergleichen:

- $f''(x) < 0$ bedeutet Maximum, $f''(x) > 0$ Minimum.

10. Wendepunkte:
    - Zweite Ableitung $f''(x)$ bilden.
    - Zweite Ableitung gleich Null setzen ($y'' = 0$).
    - Nach x auflösen (GTR, Polynomdivision, Ausklammern).
    - Diese Lösungen in die Funktion einsetzen und y ausrechnen.
    - Dritte Ableitung $f'''(x)$ bilden.
    - In die dritte Ableitung einsetzen und mit Null vergleichen.
    - $f'''(x) \neq 0$ Wendepunkt, $f'''(x) = 0$ weitere Untersuchungen notwendig.
    - Lösungsangabe: $W(...;...)$.
11. Tangente an einen Punkt der Funktion f:
    - Grundgedanke bei Geraden ist immer $y = mx + n$.
    - Wenn Punkt vorgegeben ist, so ist bereits x und $y = f(x)$ gegeben.
    - Erste Ableitung $f'(x)$ bilden.
    - Den x-Wert des Punktes in die erste Ableitung einsetzen ($f'(x) = m$).
    - m, x und y in Geradengleichung einsetzen.
    - Nach n auflösen.
    - Lösungsangabe: $y = \ldots x + \ldots$.
12. Tangente mit einem bestimmten Anstieg:
    - Grundgedanke bei Geraden ist immer $y = mx + n$.
    - Wenn der Anstieg vorgegeben ist, dann ist also bereits $m = y' = f'(x)$ gegeben.
    - Erste Ableitung $f'(x)$ bilden.
    - Erste Ableitung gleich m setzen und nach x auflösen.
    - Diese Lösungen in die Funktion einsetzen und y ausrechnen.
    - x, y und m in die Geradengleichung einsetzen.
    - Nach n auflösen.
    - Lösungsangabe: $y = \ldots x + \ldots$.
13. Normale in einem Punkt:
    - Grundgedanke bei Geraden ist immer $y = mx + n$.
    - Tangente in diesem Punkt ausrechnen (siehe 11.).
    - Wenn Punkt vorgegeben ist, so ist bereits x_0 und $y_0 = f(x_0)$ gegeben.
    - Der Anstieg der Normalen m_N ist das negative Reziproke von m_T, also $m_N = \frac{-1}{m_T}$.
    - x_0, y_0 und m_N in die Geradengleichung einsetzen.
    - Nach n auflösen.
    - Lösungsangabe: $y = m_N x + n$.
14. Schnittpunkte zweier Funktionen:
    - Funktionsgleichungen gleichsetzen.
    - Eine Seite zu Null machen.
    - Nach x auflösen (Prinzip, wie bei Nullstellen berechnen).

- Diese Lösungen in die einfachere der beiden Funktion einsetzen und y ausrechnen.
- Lösungsangabe: $S(...;...)$

15. Fläche zwischen zwei Funktionen:
    - Schnittstellen ausrechnen (siehe 14.).
    - Differenzenfunktion bilden $(f(x) - g(x))$.
    - Das Integral von der linke Schnittstelle bis zur rechten Schnittstelle der Funktion $\int_a^b (f - g)dx$.
    - Stammfunktion bilden.
    - Rechte Schnittstelle in die Stammfunktion einsetzen.
    - Linke Schnittstelle in die Stammfunktion einsetzen.
    - Differenz dieser beiden Werte bilden. (Wert der rechten Schnittstelle - Wert der linke Schnittstelle)
    - Gegenbenenfalls nachträglich den Betrag bilden.
16. Fläche zwischen Funktionen und x-Achse:
    - Nullstellen ausrechnen (siehe 3.).
    - Das Integral von der linke Nullstelle bis zur rechten Nullstelle der Funktion $\int_a^b f dx$.
    - Stammfunktion bilden.
    - Rechte Nullstelle in die Stammfunktion einsetzen.
    - Linke Nullstelle in die Stammfunktion einsetzen.
    - Differenz dieser beiden Werte bilden. (Wert der rechten Nullstelle - Wert der linke Nullstelle)
    - Gegenbenenfalls nachträglich den Betrag bilden.
17. Extremwertaufgaben:
    - Skizze für einen beliebigen Wert. Dieser Wert ist völlig egal, aber man benötigt eine Visualisierung.
    - In die Skizze bereits an gegebene Punkte die Koordinaten schreiben.
    - Punkte auf dem Graphen von f haben die Koordinaten $(x; f(x))$, Punkte auf der x-Achse $(...; 0)$ und Punkte auf der y-Achse $(0; ...)$.
    - Achsenparallele Strecken finden.
    - Hauptbedingung aufstellen. (was soll maximiert oder minimiert werden)
    - Nebenbedingungen aufstellen. (was macht das Extremalproblem zu unserem Problem)
    - Nebenbedingungen in Hauptbedingung einsetzen ergibt die Zielfunktion.
    - Extrempunkte und Art dieser Extrempunkte der Zielfunktion bilden (siehe 8. und 9.)
    - eventuell Randbedingungen untersuchen.