Auswirkungen von Summanden und Faktoren auf den Verlauf einer Funktion

Alexander Kirst

29. Februar 2012

Inhaltsverzeichnis

Alle Grafiken wurden mit Maple 9.5. erstellt.

1 Untersuchung der Funktion $f(x) = c \cdot x^n$

Sei $c, x \in \mathbb{R}$ und $c \neq 0$ sowie $n \in \mathbb{N}^+$.
Ohne Einfluss des Parameters c ($c = 1$) können folgende Aussagen getroffen werden:
Falls n eine **ungerade** Zahl sein sollte, so verläuft der Graph der Funktion f durch den ersten und dritten Quadranten. Es handelt sich hierbei für $n = 1$ um eine Gerade bzw. für $n \geq 3$ um eine Parabel n-ten Grades, jeweils durch den Koordinatenursprung. Der Graph ist zentralsymmetrisch zum Koordinatenursprung. Da n ungerade ist, gilt $n = 2k + 1$ und somit

$$\begin{aligned}
f(-x) &= (-x)^n \\
&= (-x)^{2k+1} \\
&= (-x)^{2k} \cdot (-x) \\
&= (x)^{2k} \cdot (-x) \\
&= -((x)^{2k} \cdot (x)) \\
&= -((x)^{2k+1}) \\
&= -((x)^n) \\
&= -f(x)
\end{aligned}$$

Gemeinsame Punkte aller Funktionen $f(x) = x^n$ sind $(-1; -1)$, $(0; 0)$ und $(1; 1)$, weil

$$\begin{aligned}
f(-1) &= (-1)^n = -1 \\
f(0) &= 0^n = 0 \\
f(1) &= 1^n = 1
\end{aligned}$$

Sollte hingegen n eine **gerade** Zahl sein, so handelt es sich um eine Parabel geraden Grades, die durch den ersten und zweiten Quadranten sowie durch den Koordinatenursprung verläuft. Die Parabeln geraden Grades sind achsialsymmetrisch zur y-Achse und besitzen die gemeinsamen Punkte $(-1; 1)$, $(0; 0)$ und $(1; 1)$. Da n gerade ist, gilt $n = 2k$ und somit

$$\begin{aligned}
f(-x) &= (-x)^n \\
&= (-x)^{2k} \\
&= (x)^{2k} \\
&= (x)^n \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
f(-1) &= (-1)^n = 1 \\
f(0) &= 0^n = 0 \\
f(1) &= 1^n = 1
\end{aligned}$$

Der Einfluss des Parameters c für gerades n: Für $\mid c \mid> 1$ wird die Parabel gestreckt, so dass sie eine kleinere Öffnung besitzt, beziehungsweise die Parabeläste schmiegen sich immer weiter an die y-Achse an. Dabei bleibt allerdings der Verlauf durch den Koordinatenursprung erhalten, da $f(0) = c \cdot 0^n = 0$ und somit unabhängig von c ist. Sollte hingegen $0 < c < 1$, so wird die Parabel gestaucht, so dass die Öffnung größer wird, beziehungsweise die Parabeläste schmiegen sich immer weiter an die x-Achse an. Dabei wird bei c mit negativen Vorzeichen noch eine Spiegelung an der x-Achse durchgeführt.

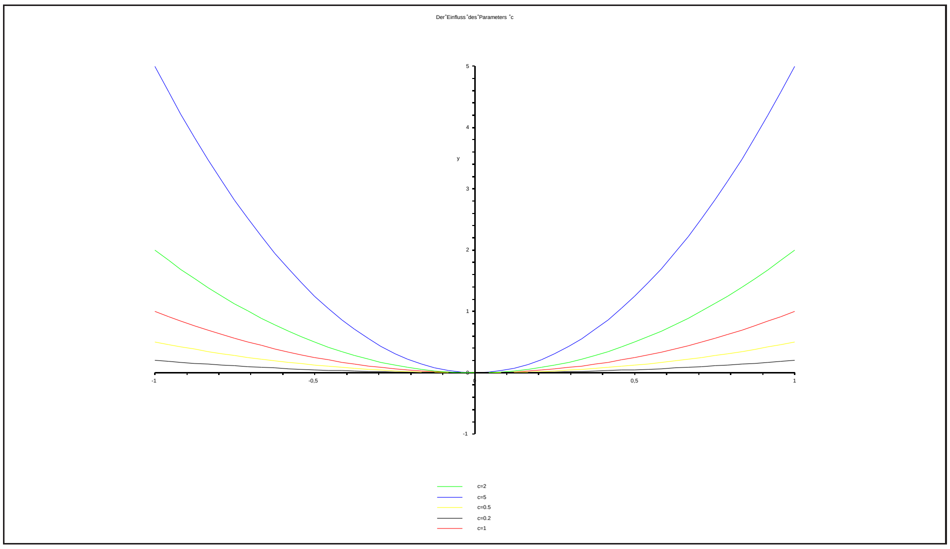

Abbildung 1: Einfluss des Parameters c bei Parabeln geraden Grades

Der Einfluss des Parameters c für ungerades n: Für $c > 1$ wird die Parabel gestreckt, so dass sie sich näher an die y-Achse anschmiegt. Dabei bleibt allerdings der Verlauf durch den Koordinatenursprung erhalten, da $f(0) = c \cdot 0^n = 0$ und somit unabhängig von c ist. Sollte hingegen $0 < c < 1$, so wird die Parabel gestaucht, so dass die Öffnung größer wird, beziehungsweise die Parabeläste schmiegen sich immer weiter an die x-Achse an. Auch hier wird bei c mit negativen Vorzeichen noch eine Spiegelung an der x-Achse durchgeführt. Der Wertebereich von f bleibt vom

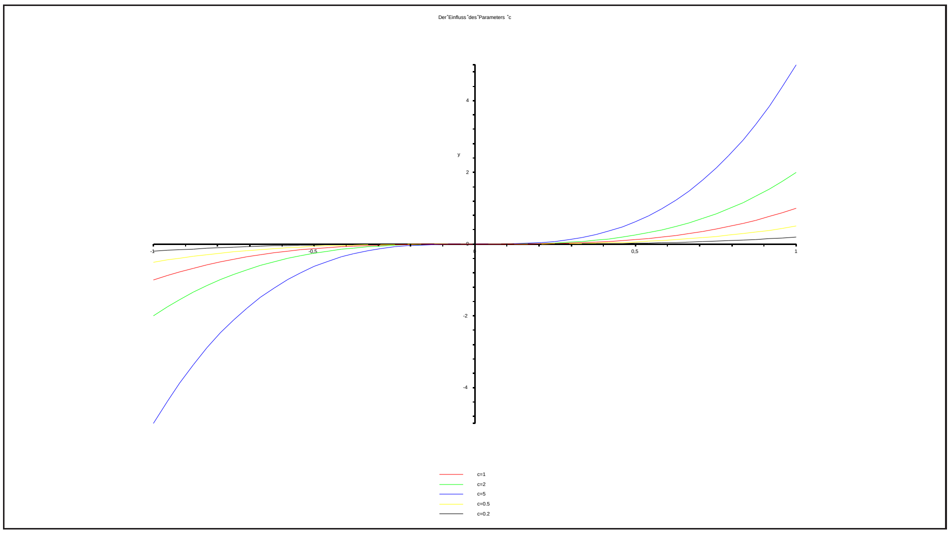

Abbildung 2: Einfluss des Parameters c bei Parabeln ungeraden Grades

Parameter c unverändert. So gilt

$$\mathcal{D}_f = \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^- & \text{falls } n \text{ gerade und } c > 0 \\ \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^+ & \text{falls } n \text{ gerade und } c < 0 \\ \mathbb{R} & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

2 Untersuchung der Funktion $f(x) = x^n + d$

Sei $d, x \in \mathbb{R}$ sowie $n \in \mathbb{N}^+$.
Unabhängig von der Wahl des Exponenten n zeichnet sich der Einfluss des Paramaters d in einer Verschiebung entlang der y-Achse aus. Für $d > 0$ wird die Parabel in Richtung positiver y-Achse verschoben. Sollte hingegen $d < 0$, so wird die Parabel in Richtung negativer y-Achse verschoben. In beiden Fällen liegt der Scheitelpunkt der Parabel geraden Grades bzw. der Wendepunkt (Sattelpunkt) der Parabel ungeraden Grades auf der y-Achse. Deren Koordinaten lauten $(0, d)$. Demnach wird der Wertebereich der Parabeln geraden Grades geändert. Er lautet $\mathcal{C}_f = \{y \in \mathbb{R} | y \geq d\}$. Für die Parabeln ungeraden bleibt der Wertebereich hingegen unverändert $\mathbb{R}$. Eine weitere Eigenschaft

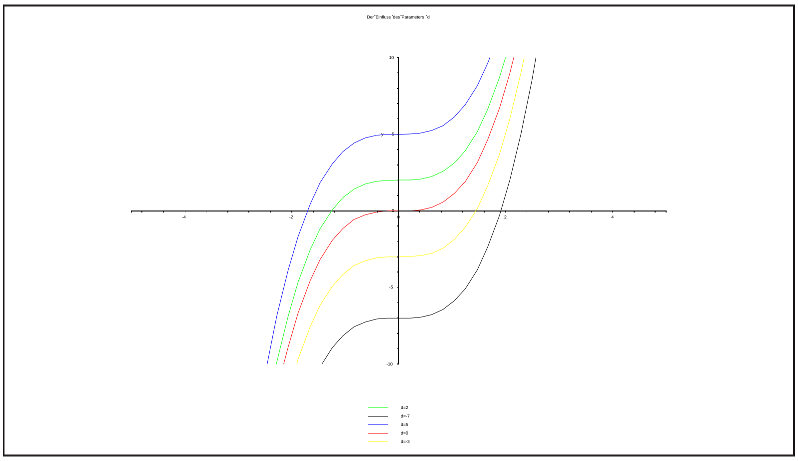

Abbildung 3: Einfluss des Parameters d bei Parabeln geraden Grades

kann der Parameter d noch beeinflussen. Die Nullstellen der Parabeln. Sollte $d < 0$, so besitzt f zwei Nullstellen, $d = 0$ eine Nullstelle sowie für $d > 0$ keine Nullstelle. Dies wird sofort klar, wie die folgende Rechnung zeigt:

$$
\begin{aligned}
0 &= x^n + d & &| - d \\
-d &= x^n & &| \sqrt[n]{}
\end{aligned}
$$

Da n gerade ist, gibt es für diese Gleichung zwei Lösungen für $d < 0$, eine Lösung für $d = 0$ und keine Lösung für $d > 0$.

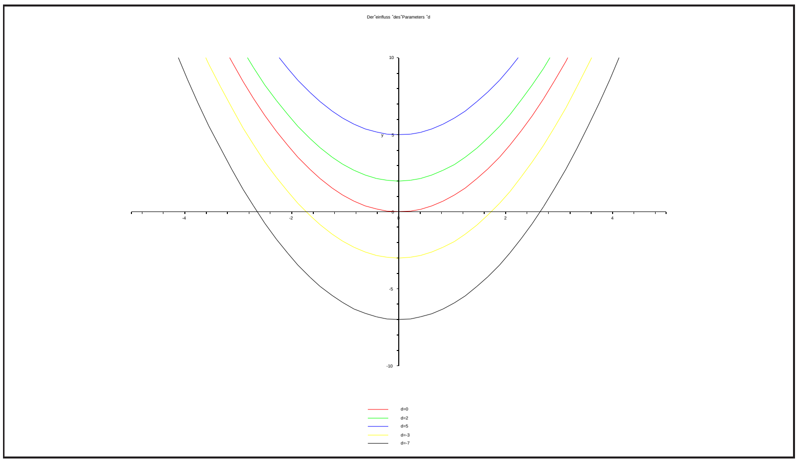

Abbildung 4: Einfluss des Parameters d bei Parabeln geraden Grades

3 Untersuchung der Funktion $f(x) = (x + e)^n$

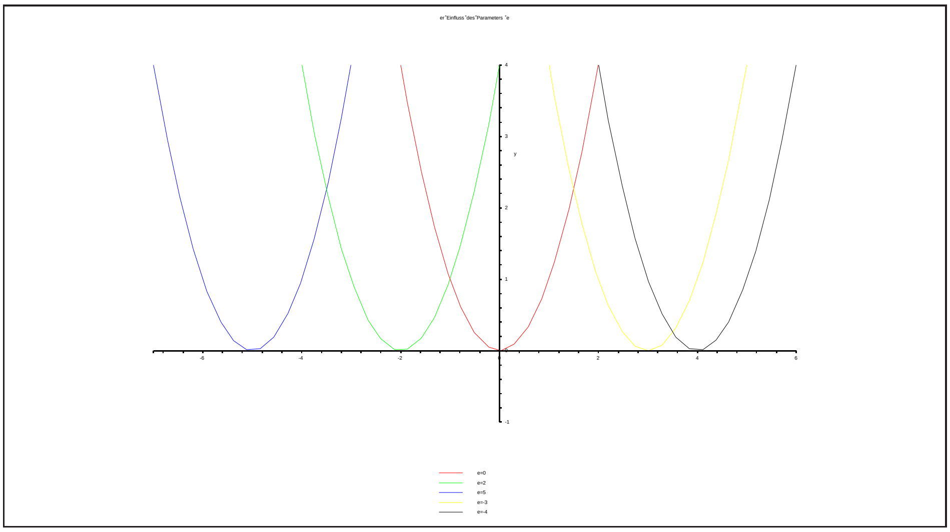

Abbildung 5: Einfluss des Parameters e bei Parabeln geraden Grades

Sei $e, x \in \mathbb{R}$ sowie $n \in \mathbb{N}^+$.
Unabhängig von der Wahl des Exponenten n zeichnet sich der Einfluss des Paramaters e in einer Verschiebung entlang der x-Achse aus. Für $e > 0$ wird die Parabel in Richtung negativer x-Achse verschoben. Sollte hingegen $e < 0$, so wird die Parabel in Richtung positiver x-Achse verschoben. In beiden Fällen liegt der Scheitelpunkt der Parabel geraden Grades bzw. der Wendepunkt (Sattelpunkt) der Parabel ungeraden Grades auf der x-Achse. Deren Koordinaten lauten $(-e, 0)$. Demnach wird der Wertebereich der Parabeln geraden Grades nicht geändert. Es gilt $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-$. Für die Parabeln ungeraden Grades bleibt der Wertebereich ebenfalls unverändert $\mathbb{R}$. Die Anzahl der Nullstellen der Parabeln sind unabhängig vom gewählten Parameter. f hat immer nur eine Nullstelle bei $x_0 = -e$.

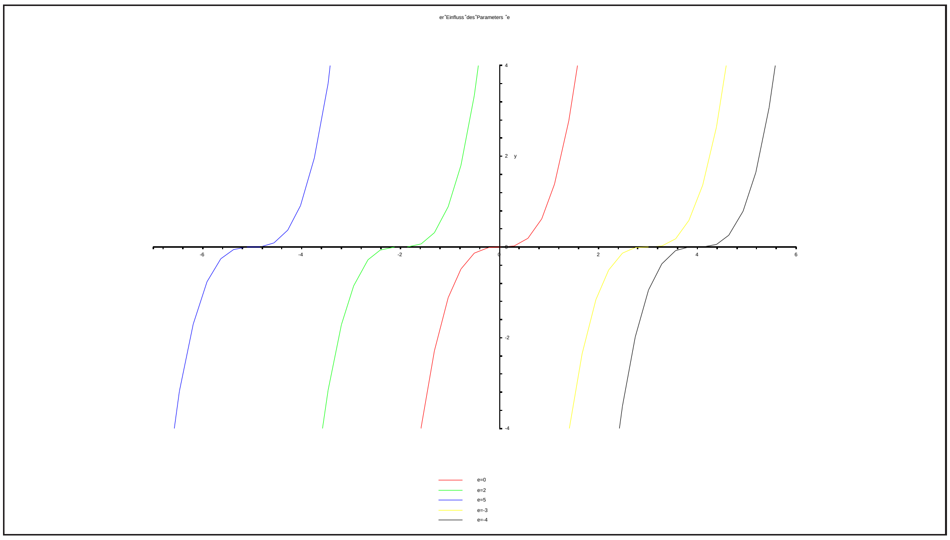

Abbildung 6: Einfluss des Parameters e bei Parabeln ungeraden Grades

4 Untersuchung der Funktion $f(x) = c \cdot (x+e)^n + d$

Sei $c, d, e, x \in \mathbb{R}$ und $c \neq 0$ sowie $n \in \mathbb{N}^+$.
Hier werden die Parameter $c.d.e$ gemeinsam auf die Potenzfunktion angewandt. Die unter 1-3 beschriebenen Funktionen werden dabei kombinierbar, so dass sämtliche Parabeln horizontal und vertikal verschoben, gestaucht oder gestreckt oder aber gespiegelt werden können.

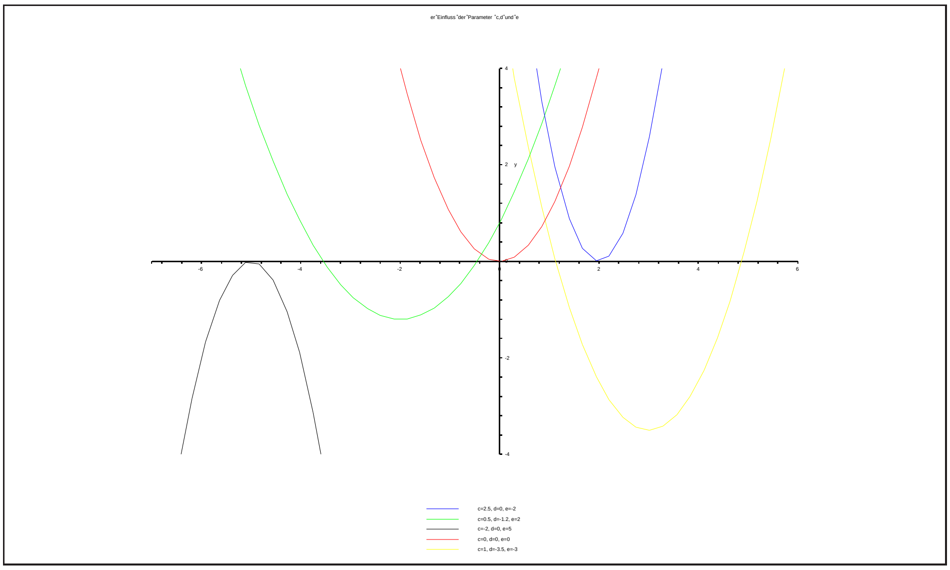

Abbildung 7: Einfluss des Parameters c, d und e bei Parabeln geraden Grades

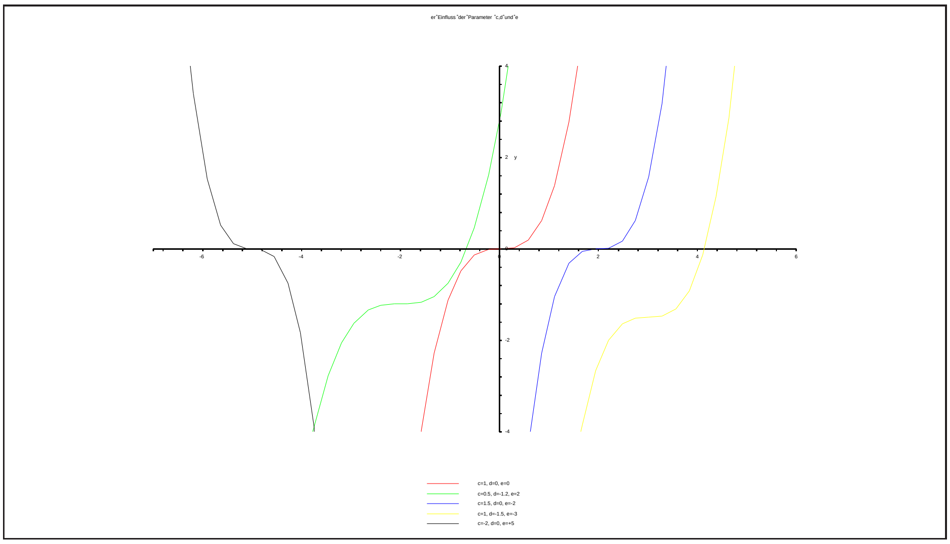

Abbildung 8: Einfluss des Parameters c, d und e bei Parabeln ungeraden Grades