9. Februar 2017

1. Ortsvektor bestimmen
   - Der Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ eines Punktes $P(x_p; y_p; z_p)$ ist gleich seiner Koordinaten nur als Komponenten untereinander geschrieben, also $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix}$.
2. Vektor zwischen zwei Punkten
   - Ortsvektoren beider Punkte bestimmen. Die Differenz bildet den Vektor zwischen beiden Punkten. ACHTUNG: "Spitze minus Fuß"!!!
3. Betrag/Länge eines Vektors
   - Ist auch anzuwenden für die Berechnung der Länge einer Strecke. In die Betragsformel einsetzen und lösen.
   - $\mid a \mid = \sqrt{x^2 + y^2}$ im $\mathbb{R}^2$
   - $\mid a \mid = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ im $\mathbb{R}^3$
4. Gerade aus zwei Punkten bestimmen
   - Zunächst die Ortsvektoren der Punkte bestimmen.
   - Den Ortsvektor eines Punktes als Stützvektor benutzen.
   - Die Differenz der beiden Ortsvektoren bestimmen und diese als Richtungsvektor benutzen.
   - Lösungsangabe: $OX = (...) + r(...)$, $r \in \mathbb{R}$.
5. Liegt ein Punkt auf einer Geraden? (Punktprobe)
   - Ortsvektor des zu untersuchenden Punktes bestimmen
   - Diesen für OX in die gegebene Geradengleichung einsetzen.
   - Die vektorielle Gleichung als Gleichungssystem auffassen und jede Zeile nach dem Parameter r auflösen.
   - Stimmen die Lösungen für r in jeder Zeile überein, so liegt der Punkt auf der Geraden. Andernfalls nicht.
6. Ebene aus drei Punkten bestimmen
   - Zunächst die Ortsvektoren der Punkte bestimmen.
   - Den Ortsvektor eines Punktes als Stützvektor benutzen.

- Die Differenz der beiden ersten Ortsvektoren bestimmen und diese als ersten Spannvektor benutzen
- Die Differenz des ersten und letzten Ortsvektors bestimmen und diese als zweiten Spannvektor benutzen
- Lösungsangabe: $OX = (...) + s(...) + t(...)$, $s, t \in \mathbb{R}$. Dies ist die Parameterform der Ebene.

7. Parameterfreie Form (Koordinatenform; $Ax + By + Cz = D$) bestimmen/Normalenvektor einer Ebene
   - Bei gegebener Parameterform: Kreuzprodukt der Spannvektoren bilden, dies sind die Koeffizienten vor x, y und z, also A, B und C.
   - Stützvektor für x, y und z einsetzen und D bestimmen.
   - Sonst: Koordinatenform einfach mit GTR bestimmen oder vorher Parameterform aufstellen (siehe 6.)
   - Die Koeffizienten vor x, y und z, also A, B und C ergeben den Normalenvektor der Ebene. Er steht senkrecht auf der Ebene.
   - Koordinatenebenen:
     - xy-Koordinatenebene: $z = 0$
     - xz-Koordinatenebene: $y = 0$
     - yz-Koordinatenebene: $x = 0$
8. Liegt ein Punkt in einer Ebene? (Punktprobe)
   (a) Falls Ebene in Parameterform:
   - Ortsvektor des Punktes bestimmen und für OX in die Ebenengleichung einsetzen
   - Zwei Zeilen als Lineares Gleichungssystem nach s und t lösen
   - Diese Lösung in die dritte Gleichung einsetzen
   - Stimmen beides Seiten überein, so liegt der Punkt auf der Ebene, andernfalls nicht

   (b) Falls Ebene in Koordinatenform:
   - x,y,z Komponente des Punktes in die Gleichung einsetzen
   - Stimmen beides Seiten überein, so liegt der Punkt auf der Ebene, andernfalls nicht
9. Winkel zwischen Vektoren
   - Länge beider Vektoren bilden
   - Skalarprodukt (Koordinatenschreibweise) beider Vektoren bilden
   - In die Gleichung des Skalarproduktes mit dem Kosinus einsetzen $\left(\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$
   - Den Winkel ausrechnen mit $\cos^{-} 1$
   - Achtung: Bei Geraden immer den kleineren der beiden Nebenwinkel angeben
10. Winkel zwischen Geraden
    - Der Winkel der Richtungsvektoren der Geraden bestimmt den Winkel zwischen den Geraden.
    - Richtungsvektoren bestimmen und dann wie bei 9.
11. Winkel zwischen Ebene und Gerade
    - Der Winkel des Richtungsvektors der Geraden und des Normalenvektors der Ebene bestimmen den Winkel zwischen Ebene und Geraden.

- Richtungsvektor und Normalenvektor bestimmen und dann wie bei 9.
- ACHTUNG: Hier wird aus Kosinus der Sinus!!!!

12. Winkel zwischen zwei Ebenen
    - Der Winkel der Normalenvektoren der Ebenen bestimmt den Winkel zwischen den Ebenen.
    - Normalenvektoren bestimmen und dann wie bei 9.
13. Lagebeziehungen zweier Geraden
    - Erst Parallelität der Richtungsvektoren prüfen.
    - Falls parallel:
      - Den Stützvektor der ersten Geraden in die zweite einsetzen.
      - Stimmen die Parameter in jeder Zeile überein, dann sind sie identisch andernfalls echt parallel.
    - Falls nicht parallel:
      - Beide Gleichungen gleichsetzen und das Lineare Gleichungßystem lösen.
      - Gibt es keine Lösung, so sind sie windschief, andernfalls haben Sie einen Schnittpunkt.
      - Um den Ortsvektor des Schnittpunktes zu bestimmen, muß der Parameter in die jeweilige Gleichung eingesetzt werden.
14. Lagebeziehung zweier Ebenen
    - Erst Parallelität der Normalenvektoren prüfen
    - Falls parallel:
      - Den Stützvektor der ersten Ebene in die zweite einsetzen.
      - Stimmen die Parameter in jeder Zeile überein, dann sind sie identisch andernfalls echt parallel.
    - Falls nicht parallel:
      - Beide Gleichungen gleichsetzen und das Lineare Gleichungßystem lösen.
      - Es gibt immer eine Lösung in Abhängigkeit eines Parameters.
      - Die so genannte Spurgerade entsteht durch einsetzen des einen Parameters, er in Abhängigkeit des anderen Parameters steht.
15. Lagebeziehung Ebene und Gerade
    - Geradengleichung mit Ebenengleichung gleichsetzen und das Lineare Gleichungßystem lösen.
    - Eine Lösung entspricht dem Durchstoßpunkt. Diesen bestimmt man, indem der Parameter in die jeweilige Gleichung eingesetzt wird.
    - Sollte es keine Lösung geben, so sind Sie echt parallel, bei unendlich vielen Lösungen liegt die Gerade in der Ebene
16. Abstand Punkt-Gerade
    - Bilde eine Hilfsebene, die den Richtungsvektor der Geraden als Normalenvektor besitzt und den Punkt enthält.
    - Der Durchstoßpunkt (siehe 15.) der Geraden mit der Hilfsebene hat den geringsten Abstand der Geraden zum Punkt.
17. Abstand Punkt-Ebene

- Fälle das Lot vom Punkt $P(x_p, y_p, z_p)$ aus auf die Ebene $Ax + By + Cz = D$. Die Lotgerade hat als Stützvektor den Ortsvektor des Punktes P und als Richtungsvektor den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ der Ebene.
- Der Lotfußpunkt entspricht dem Durchstoßpunkt der Lotgeraden durch die Ebene. (siehe 15.)
- Sollte der Lotfußpunkt nicht benötigt werden, so benutze den ermittelten Parameter (siehe 15.) und multipliziere ihn mit der Länge des Normalenvektors der Ebene. Dies ist der gesuchte Abstand.
- Schneller geht es mit der Hesseschen Normalenform:

$$d = \left| \left(\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{p_o} \\ y_{p_o} \\ z_{p_o} \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

18. Abstand Gerade-Gerade
    - Ist nur sinnvoll, falls die Geraden echt parallel oder windschief sind.
    - Sind die Geraden echt parallel, so wähle den Punkt, der als Stützvektor der ersten Gerade gegeben ist und berechne den Abstand dessen zur zweiten Gerade. (siehe 16.)
    - Sind die Geraden windschief, so bilde eine Hilfsebene in Koordinatenform aus den beiden Richtungsvektoren als Spannvektoren der Hilfsebene und dem Stützvektor der ersten Geraden als Stützvektor der Hilfsebene.
    - Wähle den Punkt, der als Stützvektor der Gerade gegeben ist und berechne den Abstand dessen zur Hilfsebene. (siehe 17.)
19. Abstand Gerade-Ebene
    - Ist nur sinnvoll, falls die Gerade und Ebene echt parallel sind.
    - Wähle den Punkt, der als Stützvektor der Gerade gegeben ist und berechne den Abstand dessen zur Ebene. (siehe 17.)
20. Abstand Ebene-Ebene
    - Ist nur sinnvoll, falls die beiden Ebenen echt parallel sind.
    - Wähle einen beliebigen Punkt der ersten Ebene und berechne den Abstand dessen zur zweiten Ebene. (siehe 17.)