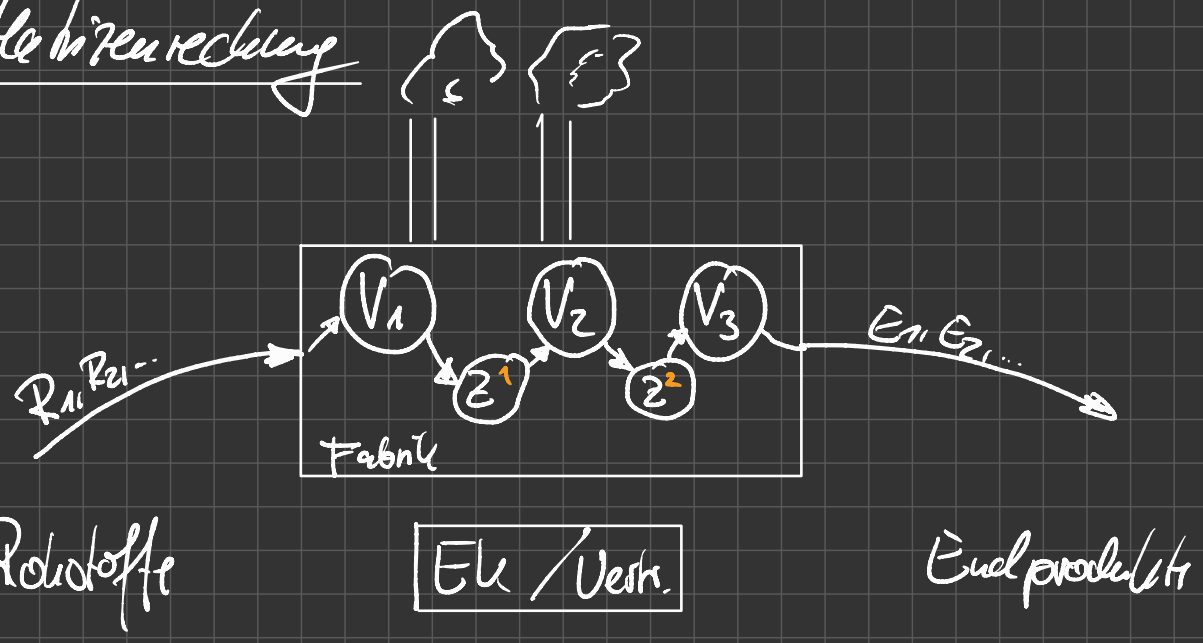
Kapitel 2 Lineare Algebra

Matrizenrechnung



Rohstoffverbrauchstabelle

V_1	Z_1^1	Z_2^1	Z_3^1	...
R_1				
R_2				
⋮				

V_2	Z_1^2	Z_2^2	Z_3^2	...
Z_1^1				
Z_2^1				
⋮				

V_3	E_1	E_2	...
Z_1^2			
Z_2^2			
⋮			

ME an R_1 um 1 ME Z_1^1 herzustellen

ME an Z_1^1 um 1 ME Z_1^2 herzustellen

analog

⇒ Gesamtverflechtungstabelle

	E_1	E_2	...
R_1			
R_2			
⋮			

ME an R_1 um 1 ME E_1 herzustellen

Bezeichnungen:

r = Rohstoffvektor

z = Zwischenproduktvektor

e = Endproduktvektor

V_1 = Rohstoffverbrauchsmatrix des 1. Produktionsschrittes

V_2 = Rohstoffverbrauchsmatrix des 2. Produktionsschrittes

V = Rohstoffverbrauchsmatrix des gesamten Produktionsprozesses (Gesamtverflechtungsmatrix)

$$r = V_1 \cdot z = V_1 \cdot (V_2 \cdot e) = (V_1 \cdot V_2) \cdot e = V \cdot e$$

Begriffe rund um Matrizen: $(m, n \in \mathbb{N}^+)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

heißt $(m \times n)$-Matrix.

Falls $m = n$
$\Rightarrow$ A ist eine quadratische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

i-ter Zeilenvektor

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots a_{1j} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots a_{2j} \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots a_{3j} \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots a_{mj} \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

j-ter Spaltenvektor

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ij} → (Matrix-) Element der i-ten Zeile und j-ten Spalte

Sei A eine quadratische Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

a_{nn} → (Haupt-) Diagonale

Bsp.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

für rechteckige Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -1 & -2 \\ 6 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 8 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Nullmatrix $\mathbb{0}_{m,n}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

- Einheitsmatrix $\mathbb{1}_n$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- Vergleich von Matrizen $(>, \geq, <, \leq, =, \neq)$
  - → wie bei reellen Zahlen, elementweise
  - → Matrizen haben das gleiche Format

$$\underbrace{a_{ij}}_{\text{Elemente von } A} \quad \dots \quad \underbrace{b_{ij}}_{\text{Elemente von } B}$$

Falls für alle Elementpaare das selbe Relationszeichen entsteht, so kann dieses als Vergleich der Matrizen dienen. Ausnahme $(\neq)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 1 = 1 & 2 < 3 \\ 0 = 0 & 1 < 4 \end{matrix}$$

$$\leq \qquad \begin{matrix} 1 \leq 1 & 2 \leq 3 \\ 0 \leq 0 & 1 \leq 4 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \geq \neq \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \leq \neq \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- <u>Transponieren von Matrizen</u>

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A^t = A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{m3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- <u>Addition & Subtraktion von Matrizen</u>

A und B müssen vom selben Format sein!

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

elementweise Addition bzw. Subtraktion

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}$$

<u>Bsp:</u>

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

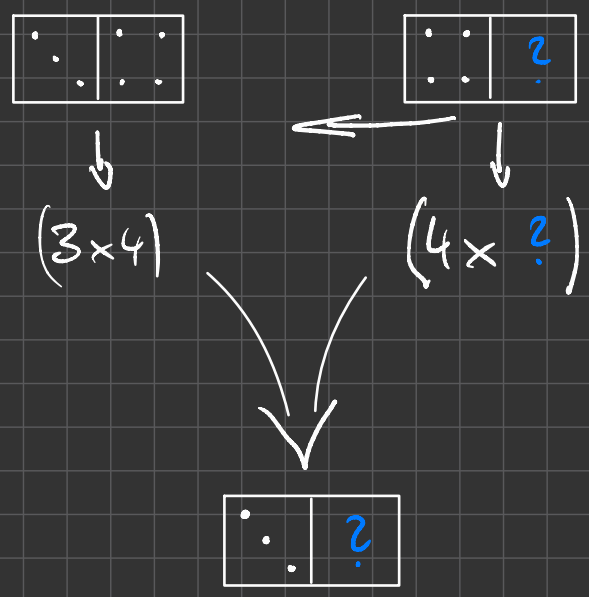
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- <u>Multiplikation von Matrizen</u>

K

Die Multiplikation von Matrizen ist i.A. <u>nicht</u> kommutativ. $(A \cdot B \neq B \cdot A)$

Die Spaltenanzahl der linken Matrix muss gleich der Zeilenanzahl der rechten Matrix sein, um sie erfolgreich untereinander multiplizieren zu können.



$(m, n, p \in \mathbb{N}^+)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mp} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pn} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

<u>Bsp:</u>

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad (A \cdot B)$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 16 & 16 & 13 \\ 4 & 16 & 12 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{2 \mid 3} \rightsquigarrow \boxed{3 \mid 2}$$

Das Falksche Schema

Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

$$
\begin{array}{c|cc}
A \cdot B \Rightarrow & 2 & 1 \\
\downarrow & 0 & 3 \\
 & 1 & 4 \\
\hline
3 \quad 2 \quad -1 & 5 & 5 \\
4 \quad 2 \quad 6 & 14 & 34 \\
2 \quad 0 \quad 1 & 5 & 6
\end{array}
$$

Anwendung: (Fortsetzung)

→ aus der Rohstoffverbrauchstabelle V_1 bzw. V_2 entsteht die Rohstoffverbrauchsmatrix V_1 bzw. V_2

Um die Gesamtverflechtungsmatrix zu bestimmen, wird $V_1 \cdot V_2$ gebildet (Vor. Anzahl der Z_i muss bei V_1 und V_2 übereinstimmen)

Kontrollfrage:

$$
\begin{tikzcd}
R_1, R_2, R_3 \arrow[r, "V_1"] & Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 \arrow[d, "V_2"] \\
 & E_1, E_2, E_3, E_4 & R_4
\end{tikzcd}
$$

V_1	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	$R_4 = Z_5$
R_1					0
$\vdots$					0
R_4	0	0	0	0	1

7.4 Übungsaufgaben

$m \times n$

1) Gegeben sind die Matrizen

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und die Vektoren } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Man berechne:

a) $2\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{D} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$; b) $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$, $2\boldsymbol{x} + 3\boldsymbol{y}$; c) $\boldsymbol{AD}$, $\boldsymbol{DA}$, $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{AC}$;
d) $\boldsymbol{Ax}$, $\boldsymbol{Dy}$, $\boldsymbol{Bz}$, $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$.

2) Man untersuche die folgenden linearen Gleichungssysteme auf Lösbarkeit und löse sie im Fall der Lösbarkeit:

a) $\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &= -1\,; \\ x_1 - x_2 &= 3 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 2{,}3a + 6{,}2b &= 46{,}1\,; \\ -2a + 1{,}1b &= -1{,}4 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 2u_1 + u_2 - u_3 &= 5\,; \\ u_1 - 6u_2 + 2u_3 &= 8 \\ 13u_2 - 5u_3 &= 10 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} y_1 - y_2 + 2y_3 &= 8\,; \\ -y_1 + 2y_2 - y_3 &= -3 \\ y_1 + 3y_3 &= 13 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 8x_4 &= 12 \\ -x_1 + 2x_3 - x_4 &= 4 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 &= -9 \\ x_1 + 6x_2 + 3x_4 &= -7 \end{aligned}$

3) Man bestimme den Rang folgender Matrizen:

a) der Matrizen $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{C}$ aus Aufgabe 1);

b) der Matrizen $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 7 & 6 \\ -2 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

4) Man untersuche folgende Matrizen auf Regularität und berechne im regulären Fall die Inverse:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

5) Für ein Unternehmen mit 2 Sektoren gehen die gegenseitigen Lieferungen, die Lieferungen an den Endverbaucher und die Rohstofflieferungen (alles in ME pro Berichtsperiode) aus folgender Tabelle hervor:

Lösung: a) $2A - 4D =$

Hallo

$$A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 8 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 12 \end{pmatrix} - D_4 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \\ 8 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -6 \\ 8 & 8 & -4 \\ -4 & -2 & 12 \end{pmatrix}$$

$$D + A^T \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

b) $x - y \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - y = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 2x + 3y$

habe ich noch nicht

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

c)

$$A \cdot D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -1 \\ 4 & 2 & 4 \\ 14 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

UPS

$A \cdot D$			1	1	0
			0	-1	1
			2	1	0
2	1	-3	-4	-2	1
4	2	0	4	2	2
2	1	6	14	7	1

$D \cdot A$						
			2	1	-3
			4	2	0
			2	1	6
1	1	0	6	3	−3
0	-1	1	-2	-1	6
2	1	0	8	4	-6

$B^T \cdot A$					
			2	1	-3
			4	2	0
			2	1	6
-1	1	-2	-2	-1	-9
0	2	3	14	7	18

upsi

$A \cdot C$							
			1	-1	0	3
			0	2	-4	1
			6	1	0	0
2	1	-3	-16	-3	-4	7
4	2	0	4	0	-8	14
2	1	6	38	6	-4	7

d) $Ax = = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix}$ $\quad Dy = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad Bz = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$x^T y = 3$$

- Sei A eine quadratische Matrix. Wir definieren die Determinante von A:

$\underline{n = 1}$: $\quad A = (a_{11})$ $\qquad n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$

$$\det A = a_{11}$$

$\underline{n=2}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$\underline{n=3}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$$
$$- a_{12}\, a_{21}\, a_{33} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32} - a_{13}\, a_{22}\, a_{31}$$

<u>Regel von Sarrus:</u>

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

<u>Bsp:</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad \det A = 1 \cdot 6 - 3 \cdot (-4)$

$$= 6 + 12 = 18$$

$B: \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 6 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \det B = 2 + 72 + 0$

$$-0 - (-3) - 12$$

Sarrus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 6 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{matrix} \qquad = 65$$

- Rang einer Matrix: Sei A eine $(m \times n)$-Matrix.

Der Rang einer Matrix ist die Anzahl der Nichtnullzeilen dieser Matrix nach Abschluss des Gauß-Algorithmus. Dieser Gauß-Algorithmus wandelt diese Matrix so um, dass unterhalb aller Diagonalelement lauter Nullen entstehen.

Das Gauß-Verfahren:

Gegeben:

Bsp.:

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ -3 & -8 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ \\ \cdot(3) \end{array}$$

1.) Übertrage alle Zeilen bis zur 1. Zeile. Erzeuge in der restlichen 1. Spalte mit Hilfe der 1. Zeile lauter Nullen.

$$\begin{array}{l} \mathrm{I}' \\ \mathrm{II}' = \mathrm{II} - 2\mathrm{I} \\ \mathrm{III}' = 3\mathrm{I} + \mathrm{III} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Big] +$$

2.) Übertrage alle Zeilen bis zur 2. Zeile. Erzeuge in der restlichen 2. Spalte mit Hilfe der 2. Zeile lauter Nullen.

$$\begin{array}{c} \\ \\ \mathrm{III}'+\mathrm{II}' \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Algorithmus bricht ab.

$\Longrightarrow$ rang $A = 3$

Bsp:

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \cdot(2) \\ + \\ \end{array} \quad \begin{array}{c} \mathrm{I}+\mathrm{II} \\ 2\mathrm{I}-\mathrm{III} \end{array}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \cdot(3) \\ \cdot(2) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang } B = 2$$

Bsp:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & -4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-4) \\ \\ \cdot(-5) \\ \cdot 3 \end{matrix} \begin{matrix} + \\ \\ + \\ + \end{matrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & 1 & -9 \\ 0 & 7 & 1 & -9 \\ 0 & -7 & -1 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ - \\ + \\ \\ \end{matrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{rang} A = 2$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 7 & 6 \\ -2 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) \\ \cdot 3 \\ \cdot(3) \end{matrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 15 & 14 \\ 0 & 5 & 15 & 14 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ - \\ - \end{matrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 15 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4.) $\det A = 0$

Satz: Sei A eine quadratische $(n \times n)$-Matrix.

Dann gilt:

$$\det A \neq 0 \iff \operatorname{rang} A = n$$

$$\det B = -1$$

$$\Rightarrow \operatorname{rang} B = 3$$

$$\det C = 10$$

$$\Rightarrow \operatorname{rang} C = 2$$

- Die Inverse einer Matrix A (quadratisch)

Sei A eine quadratische Matrix und existiert eine weitere Matrix (des selben Formats) A', so dass

$$A \cdot A' = A' \cdot A = \mathbb{1},$$

dann heißt A' <u>Inverse von</u> A. A' ist dabei eindeutig definiert (falls sie existiert). Falls sie existiert, heißt A <u>regulär</u> oder <u>invertierbar</u>. Ansonsten heißt A <u>singulär</u>.

Bestimmung der inversen Matrix mittels Gauß-Jordan-Verfahren

1) Ausgangslage: geg.: A

$$\begin{array}{l} \cdot 3 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{l} \\ \cdot(-2) \\ \\ \end{array}\right. \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -8 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = (A \mid \mathbb{1})$$

2) Gauß-Verfahren mit $(A \mid \mathbb{1})$

$$+\left[\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)\right. =$$

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \left[\begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-2) \end{array}\right. + \left[\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)\right.$$

3) Jordan-Verfahren

$$\left[\begin{array}{l} \\ \cdot 3 \\ \\ \end{array}\right. \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \cdot (-1)$$

letztes „Jordan-Schritt": linke Matrix mittels Multiplikation von Zeile (Vielfache) zur Einheitsmatrix umwandeln.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$A' = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Satz: Sei A eine quadratische $(n \times n)$-Matrix. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\det A \neq 0$

(ii) $\operatorname{rang} A = n$

(iii) A ist regulär bzw. invertierbar

Bsp: (i) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (ii) $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

prüfen, ob A invertierbar und bestimmen ggf die Inverse.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-2) \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-3) \\ + \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} -6 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-\frac{1}{6}) \\ \cdot(-\frac{1}{3}) \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/3 \end{array}\right)$$

A'

$$A' = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(ii)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-2) \\ \checkmark \end{array}$$

Gauß:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-3) \\ + \\ \\ \end{array}$$

Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -6 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot\left(-\frac{1}{6}\right) \\ \cdot\left(-\frac{1}{3}\right) \\ \cdot -1 \end{array}$$

$$B' = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Variante:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot(-1/2)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}5 & 0 & -0{,}5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) : 1{,}5$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 2/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1{,}5 & 0 & -0{,}5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot\frac{1}{2} \\ : 1{,}5 \\ \cdot(-1) \end{array}$$

$$B' = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Satz: Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine invertierbare Matrix. Dann gilt:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

K

Bsp: Ein Unternehmen produziert mit Hilfe von zwei Rohstoffen R_1 und R_2 drei Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3, die unmittelbar zu drei verschiedenen Endprodukten E_1, E_2 und E_3 weiterverarbeitet werden. Die folgenden Rohstoffverbrauchstabellen sind vorgegeben:

V_1	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	2	4	0
R_2	1	3	2

V_2	E_1	E_2	E_3
Z_1	1	0	1
Z_2	0	2	1
Z_3	3	1	2

Wie viel Ressourcen R_1 und R_2 werden benötigt, um $2 \cdot E_1$, $7 \cdot E_2$ sowie $4 \cdot E_3$ und zusätzlich $1 \cdot Z_1$ und $2\, Z_2$ herstellen zu können?

$$V_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

R	Z

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Z	E

$$V = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

R	E

$$e = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

E	ME

$$V \cdot e = \begin{pmatrix} 84 \\ 102 \end{pmatrix} = r_1$$

R	ME

$$z = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Z	ME

$$V_1 \cdot z = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix} = r_2$$

R	ME

$$r_{ges.} = r_1 + r_2 = \begin{pmatrix} 94 \\ 109 \end{pmatrix}$$

Mit welchen Gesamtrohstoffkosten ist zu rechnen, falls 1 ME R_1 5 GE und 1 ME R_2 7 GE kosten?

p = Preisvektor (für Rohstoffe)
K = Gesamtrohstoffkosten

$$K = r^T \cdot p$$

$$K = r_{ges}^{T} \cdot p \qquad p = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

R	GE

$$\begin{pmatrix} 94 & 109 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

ME	R

$$K = 470 + 763 = 1233 \text{ GE}$$

2.2. Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Bsp:

$$\begin{aligned} &\text{I} \quad 4x + 7y = -3 \\ &\text{II} \quad -2x + 3y = -5 \quad | \cdot 2 \\ &\qquad -4x + 6y = -10 \\ &\qquad \cancel{2x + 10y = -8} \end{aligned}$$

$$\text{I} + 2\text{II}: \quad 13y = -13 \quad | :13$$

$$\underline{\underline{y = -1}}$$

$$y \text{ in I}: \quad 4x + \underbrace{7 \cdot (-1)}_{-7} = -3 \quad | +7$$

$$4x = 4 \quad | :4$$

$$\underline{\underline{x = 1}}$$

$x = 1$ und $y = -1$ sind eine Lösung.

$(1 | -1)$

$$\Longrightarrow \mathbb{L} = \{(1 | -1)\}$$

Def: Seien $m, n \in \mathbb{N}^+$. Das folgende System an Gleichungen

$$
\begin{aligned}
a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\
a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n &= b_2 \\
a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 + \ldots + a_{3n} \cdot x_n &= b_3 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad & \vdots \\
a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + a_{m3} \cdot x_3 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

heißt <u>Lineares Gleichungssystem</u> (LGS) <u>in</u> n <u>Unbekannten und</u> m <u>Gleichungen</u>. Die Elemente $a_{ij} \in \mathbb{R}$ heißen <u>Koeffizienten</u>. Die Elemente $b_i \in \mathbb{R}$ heißen „<u>rechte Seiten</u>". Die x_j, die für die Lösungsmenge zu ermitteln sind, heißen <u>Unbestimmte</u>.

Bsp: geg.: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $\boxed{m \mid n}$ $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\boxed{n \mid 1}$

ges.: $A \cdot \vec{x}$

$$A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} x_3 + \ldots + a_{1n} x_n \\ a_{21} x_2 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} x_3 + \ldots + a_{2n} x_n \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + a_{m3} x_3 + \ldots + a_{mn} x_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \vec{b}$$

Folgerung: Jedes LGS kann als Gleichung von Matrizen dargestellt werden. Dabei ist A (wie in Bsp) die Koeffizientenmatrix, $\vec{x}$ (wie in Bsp) der Unbekanntevektor und $\vec{b}$ der Vektor der rechten Seite (RHS).

Lösungsverfahren zum Lösen von LGS:

1) Aufstellen der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|\vec{b})$

$$(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

2.) Anwendung des Gauß-Algorithmus auf $(A|\vec{b})$

$$(\widetilde{A|\vec{b}}) = \left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & \cdots & & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ \vdots & 0 & \tilde{a}_{33} & \cdots & & \tilde{a}_{3n} & \tilde{b}_3 \\ \vdots & & 0 & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & & & 0 & \tilde{a}_{mn} & \tilde{b}_m \end{array}\right)$$

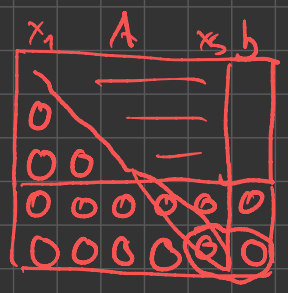
3.) Für den Fall $m=n$ und $\tilde{a}_{ii} \neq 0$ für alle $\tilde{a}_{ii}$ löse „von unten nach oben"

Falls rang A = rang $A|\vec{b}$, so ist das LGS (auch im Fall $m \neq n$) lösbar. (Umkehrung gilt auch.) Falls rang $A <$ rang $A|\vec{b}$ so ist das LGS nicht lösbar. Eindeutig lösbar ist es, wenn rang A = rang $A|\vec{b} = n$. Unendlich viele Lösungen gibt es, falls rang A = rang $A|\vec{b} < n$.

Was ist zu tun bei $m<n$?

- unterbestimmt
- nach Gauß $n-m$ Nullzeilen hinzufügen

$m=3$ $n=5$



$0x_5 = 0$ $\quad x_5 = t$

$0x_4 = 0$ $\quad x_4 = s$

$\vdots$

Was ist zu tun bei $m > n$?

- überbestimmt
- Schneide $m-n$ Zeilen ab und löse.
- Anschließend muss diese Lösung, falls vorhanden, die abgeschnittenen Gleichungen zu einer wahren Aussage überführen.

Bsp:

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 3$$
$$2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 5$$
$$-4x_1 + 9x_2 - 2x_3 = -6$$

1)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 5 \\ -4 & 9 & -2 & -6 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ \cdot 4 \end{array} \Big]+$$

2.)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 6 & 6 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \cdot 5 \\ \cdot 3 \end{array} \Big]+$$

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 13 & 13 \end{array}\right)$$

3.) III $\quad 13x_3 = 13 \quad | :13$

$$\underline{x_3 = 1}$$

II $\quad -3x_2 - x_3 = -1 \quad | x_3 = 1$

$$-3x_2 - 1 = -1 \quad | +1$$
$$-3x_2 = 0 \quad | :(3)$$
$$\underline{x_2 = 0}$$

I $\quad x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \quad | x_2 = 0 \quad x_3 = 1$

$$x_1 \underbrace{- 0 + 2 \cdot 1}_{2} = 3 \quad | -2$$

$$\underline{x_1 = 1}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (1|0|1)^T$$

$$\mathcal{L} = \{(1|0|1)^T\}$$

<u>alternativ:</u> Es ist bekannt, dass A regulär ist. Damit kann das LGS

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

durch in Inverse A' gelöst werden.

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \quad \Big| \cdot A' \text{ von links}$$

$$\underbrace{A' \cdot A}_{} \cdot \vec{x} = A' \cdot \vec{b}$$

$$\underline{\mathbb{1}} \cdot \vec{x} = A' \cdot \vec{b}$$

$$\underline{\vec{x} = A' \cdot \vec{b}}$$

alternativ 2: (Jordan - Verfahren)

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 13 & 13 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot 13 \\ \cdot 13 \; + \\ \cdot(-2) \; + \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 13 & -13 & 0 & 13 \\ 0 & -39 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 13 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-3) \; + \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -39 & 0 & 0 & -39 \\ 0 & -39 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 13 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot -\frac{1}{39} \\ \cdot -\frac{1}{39} \\ \cdot \frac{1}{13} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$\vec{x}$

Lösbarkeitskriterien:

Bsp 1)

$$x + z = 0$$
$$2x + y + z = 3$$
$$4x - y + z = 1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ + \\ \cdot(-4) \\ + \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ + \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_3 = -1 \\ x_2 = 2 \\ x_1 = 1 \end{array}\right\} \text{1 Lösung (eindeutig)}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Bsp 2)

$$x + z = 0$$
$$2x + y + z = 3$$
$$4x - y + 5z = 1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ \cdot(-4) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

$0x_3 = 4$ f.A. } keine Lösung (nicht lösbar)

$\mathcal{L} = \emptyset = \{\ \}$

Bsp3) $x + z = 0$

$2x + y + z = 3$

$4x - y + 5z = -3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

III $0x_3 = 0$

$\underline{x_3 = t}$ $\quad t \in \mathbb{R}$

$(x_3 = 11 \Rightarrow x_2 = 14 \Rightarrow x_1 = -11)$

II $x_2 - x_3 = 3 \quad | x_3 = t$

$x_2 - t = 3 \quad | +t$

$\underline{x_2 = 3 + t}$

I $x_1 + x_3 = 0 \quad | x_3 = t$

$x_1 + t = 0 \quad | -t$

$\underline{x_1 = -t}$

$\Rightarrow$ unendlich viele Lösungen (mehrdeutig lösbar)

$$\mathcal{L} = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0-t \\ 3+t \\ 0+t \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Übung 10a) $K_0 = 12000$ EUR $p = 3\%$ p.a.

Termingeld nach je zwei Monaten verzinst. Welchen Betrag erhält man nach einem halben Jahr?

$$\frac{3\%}{12 \text{ Monate}} = \frac{x}{2 \text{ Monate}} \qquad x = 0{,}5\%$$

$$\Rightarrow K_{0,5} = K_0 \cdot 1{,}005^3$$

$$= \underline{12\,180{,}90 \text{ EUR}}$$

11) geg.: 3,5% p.a.

1) $E_1 = 5000$ 1.10.2005
2) $E_2 = 2500$ 31.12.2005
3) $A = 4000$ 15.7.2006

ges.: Kontostand 1.1.2007

Jahr 2005: $K_1 = 5000 \cdot 1{,}00875 = 5043{,}75$

Saldo 31.12.05: 7543,75

Jahr 2006: Z_1: 7543,75 für 195 Tage

Z_2: 3543,75 für 165 Tage

$$Z_1 = \frac{7543{,}75 \text{ EUR} \cdot 0{,}035 \cdot 195}{360}$$

$$= \underline{\underline{143{,}02 \text{ EUR}}}$$

$$Z_2 = \frac{3543{,}75 \text{ EUR} \cdot 0{,}035 \cdot 165}{360}$$

$$= \underline{\underline{56{,}85 \text{ EUR}}}$$

Saldo 31.12.06: $\underline{\underline{3743{,}62 \text{ EUR}}}$

2d)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 8 \\ -1 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 3 & 13 \end{array}\right) \begin{matrix}]+ \\ ]- \end{matrix} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

III $0y_3 = 0$

$\underline{y_3 = t}$ $t \in \mathbb{R}$

II $y_2 + y_3 = 5 \quad | \; y_3 = t$

$y_2 + t = 5 \quad | - t$

$\underline{y_2 = 5 - t}$

$$\text{I} \quad y_1 - y_2 + 2y_3 = 8 \quad / \; y_2 = 5-t \quad y_3 = t$$

$$y_1 - (5-t) + 2t = 8$$

$$y_1 - 5 \underbrace{+t + 2t}_{3t} = 8 \quad / +5-3t$$

$$\underline{\underline{y_1 = 13-3t}}$$

$$\mathcal{L} = \left\{ \vec{y} = \begin{pmatrix} 13-3t \\ 5-t \\ t \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R} \right\}$$

Satz: Sei $A\vec{x} = \vec{b}$ ein LGS mit m Gleichungen und n Unbekannten. Dann gilt:

i) $A\vec{x} = \vec{b}$ ist lösbar, wenn $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A|\vec{b})$.
Diese ist eindeutig, falls $\operatorname{rang} A = n$.

ii) $A\vec{x} = \vec{b}$ ist nicht lösbar, falls $\operatorname{rang} A < \operatorname{rang}(A|\vec{b})$.

9.7 Aufgaben zu Kapitel 7

1) a) $2\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -6 \\ 8 & 8 & -4 \\ -4 & -2 & 12 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{D} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$;

b) $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $2\boldsymbol{x} + 3\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$;

c) $\boldsymbol{AD} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 14 & 7 & 1 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{DA} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ -2 & -1 & 6 \\ 8 & 4 & -6 \end{pmatrix}$;

$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -9 \\ 14 & 7 & 18 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{AC} = \begin{pmatrix} -16 & -3 & -4 & 7 \\ 4 & 0 & -8 & 14 \\ 38 & 6 & -4 & 7 \end{pmatrix}$.

d) $\boldsymbol{Ax} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{Dy} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{Bz} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = 3$.

2) a) $x_1 = 2, \quad x_2 = -1$; b) $a = 3{,}977\,8963, \quad b = 5{,}959\,8125$; c) unlösbar;

d) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 13 - 3x_3 \\ 5 - x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$; e) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1{,}072\,4138 \\ -1{,}581\,0345 \\ 2{,}056\,8966 \\ 1{,}186\,2069 \end{pmatrix}$.

3) a) Rang($\boldsymbol{B}$)=2; Rang($\boldsymbol{C}$) = 3; Rang($\boldsymbol{A}$) = 2; Rang($\boldsymbol{B}$) = 2.

4) $\boldsymbol{A}$ besitzt keine Inverse; $\boldsymbol{B}^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & -4 & 3 \\ -3 & -1 & 1 \\ 9 & 4 & -3 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 \\ -0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$.